# Tutorenprogramm - Strömungsmechanik I
# Wintersemester 2013/14
# Hydrostatik - Musterlösung

1. Aufgabe

1. Die Auftriebskraft eines Körpers entspricht dem Gewicht des von ihm verdrängten Fluids. $F_A = \varrho_f g V_k$, wobei $F_A$ die Auftriebskraft, $\varrho_f$ die Dichte des den Körper umgebenden Fluids, $g$ die Erdbeschleunigung, und $V_k$ das Volumen des Körpers bezeichnen.

2. Annahme konstanter Dichte.

3. Druckintegral: $\vec{F} = \int\limits_{A_K} p(z)\vec{n}_A dA \quad$ oder $\quad F_A = -\int\limits_{A_K} p(z) n_{z,A} dA$

   Anteile der Flächen normal zur $x-$ und $y-$Richtung heben sich gegenseitig auf. Es verbleibt

   $F_A = -F_z = bt\ p(z_0 + h/2) - bt\ p(z_0 - h/2))$

   Allgemein: $p(z) = p_a + \int\limits_0^z \varrho(\tilde{z}) g d\tilde{z}$.

   Damit: $F_A = bt\ g \left( \varrho_0 h + \frac{k}{2} \left( (z_0 + \frac{h}{2})^2 - (z_0 - \frac{h}{2})^2 \right) \right)$.

   $F_A = bth\ g(\varrho_0 + z_0 k)$.

4. Mit Teil 3.:

   $\overline{\varrho} g V_k = V_k\ g(\varrho_0 + z_0 k)$

   $\rightarrow \overline{\varrho} = \varrho_0 + z_0 k$

*Quelle: Herbst 2008*

2. Aufgabe

1. Kräftegleichgewicht:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum F \\
0 &= -F_A + F_G + F_W \\
0 &= -\rho(z = 0\mathrm{m}) V_B g + m_B g + \rho(z = 0\mathrm{m}) V_W g \\
V_W &= V_B - \frac{m_B}{\rho(z = 0)} = 0.768\mathrm{m}^3
\end{aligned}$$

2. Kräftegleichgewicht:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum F \\
0 &= -F_A + F_G + F_W + F_S \\
0 &= -\rho(z) V_B g + m_B g + \rho(z = 0\mathrm{m}) V_W g + F_S \\
\rho(z) &= \frac{m_B g + \rho(z = 0\mathrm{m}) V_W g + F_S}{V_B g} \\
\varrho_0 + \varrho_1 z &= \frac{m_B g + \rho(z = 0) V_W g + F_S}{V_B g} \\
z &= \frac{1}{\varrho_1} \left( \frac{m_B g + \rho(z = 0\mathrm{m}) V_W g + F_S}{V_B g} - \varrho_0 \right) \\
z &= 2071\mathrm{m}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dz} &= \rho(z) g \\
dp &= (\varrho_0 + \varrho_1\ z)\, g dz \\
\int\limits_{p(z=0)}^{p(z)} dp &= \int\limits_{z=0}^{z} (\varrho_0 + \varrho_1\ z)\, g dz \\
p(z) &= \left( \varrho_0\ z + \varrho_1\ \frac{z^2}{2} \right) g + p_a \\
400000 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} &= \left( \varrho_0\ z + \varrho_1\ \frac{z^2}{2} \right) 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 100000 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \\
z_1 &= -792030.9\mathrm{m} \\
z_2 &= 30.89\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Physikalisch sinnvolle Lösung ist $z_2 = 30.89\mathrm{m}$.

4.

$$\begin{aligned}
pV &= mRT = const. \\
p_a V_i &= \left(p_a + \Delta p\right) V_{i2} \\
V_{i2} &= 0.99\mathrm{m}^3 \\
\\
\rho(z = 30.89\mathrm{m}) &= 990\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} + 0.0025\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^4}\ 30.89\mathrm{m} = 990.08\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \\
\\
m_{W2} &= \left(V_i - V_{i2}\right)\rho(z = 30.89\mathrm{m}) = 9.9\mathrm{kg} \\
0 &> -F_A + F_G + F_W + F_W 2 - F_S \\
0 &> -\rho(z = 0\mathrm{m})V_B g + m_B g + \rho(z = 0\mathrm{m})V_W g + m_{W2} g - F_S \\
0 &> -103\mathrm{N}
\end{aligned}$$

Der Taucher kann die Oberfläche erreichen!

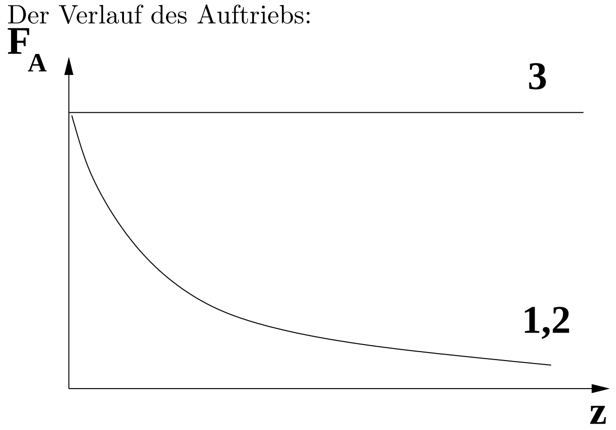
*Quelle: Frühjahr 2009*

3. Aufgabe

1. $V(z) = V_0 = const$
   $F_A = \varrho_L(H) g V_0 = \dfrac{p(H)}{R_L(T_0 - aH)} g V_0$
   Bestimmung von $p(H)$:
   $\dfrac{dp}{dz} = -\varrho g = -p \dfrac{g}{R_L(T_0 - az)}$
   $\displaystyle\int_{p_0}^{p(H)} \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R_L} \int_0^H \frac{dz}{T_0 - az}$
   $ln\left(\dfrac{p(H)}{p_0}\right) = \dfrac{g}{aR_L} ln \dfrac{T_0 - aH}{T_0} = ln\left[\left(1 - \dfrac{aH}{T_0}\right)^{\frac{g}{aR_L}}\right]$
   $p(H) = p_0 \left(1 - \dfrac{aH}{T_0}\right)^{\frac{g}{aR_L}}$
   $F_A = \dfrac{p_0}{R_L T_0} g V_0 \left(1 - \dfrac{aH}{T_0}\right)^{\frac{g}{aR_L} - 1} = \varrho_{L0} g V_0 \left(1 - \dfrac{aH}{T_0}\right)^{\frac{g}{aR_L} - 1} = 837.4N$

2. $F_A = \varrho_L(H) g V(H)$
   Bestimmung von V(H):
   mit $m_{He} = const$ und $p = \varrho RT$ folgt:
   $\left.\begin{array}{lcl} p(H)V(H) & = & m_{He} R_{He} T(H) \\ p_0 V_0 & = & m_{He} R_{He} T_0 \end{array}\right\} V(H) = V_0 \dfrac{p_0}{p(H)} \dfrac{T(H)}{T_0}$
   $V(H) = V_0 \dfrac{\varrho_{L0}}{\varrho_L(H)}$
   $F_A = \varrho_{L0} g V_0 = const$
   $F_A = 2500N$

3. Der Verlauf des Auftriebs:




*Quelle: Herbst 2007*

4. Aufgabe

1. Kräftegleichgewicht am Würfel:

$$F = F_A - F_G$$

$$F = p_a a^2 + \rho_1 g\,(t+a)\,a^2 - \rho_1 g t\left(a^2 - \pi\frac{d^2}{4}\right) - \rho_K g a^3 - p_a a^2$$

$$F = \rho_1 g a^3 + \rho_1 g t \pi\frac{d^2}{4} - \rho_K g a^3 \qquad \left[\frac{kg\cdot m}{s^2}\right] = [N]$$

2. Kräftegleichgewicht: $\sum F = 0 \Rightarrow F_G = F_A$

$$\rho_K g a^3 = \rho_1 g\,(t+a)\,a^2 - \rho_1 g t\left(a^2 - \pi\frac{d^2}{4}\right) - \rho_2 g h \pi\frac{d^2}{4}$$

$$\Rightarrow \rho_K a^3 = \rho_1 a^3 + \rho_1 t\pi\frac{d^2}{4} - \rho_2 h\pi\frac{d^2}{4}$$

$$V = \frac{\pi d^2}{4} h$$

$$\Rightarrow V = \frac{a^3(\rho_1 - \rho_K) + \rho_1 t\pi\frac{d^2}{4}}{\rho_2} \qquad [m^3]$$

3. Aus b) mit $\rho_1 = \rho_2$ : Volumen von Flüssigkeit 1 für schwebenden Körper:
   $V^* = a^3\frac{\rho_1-\rho_K}{\rho_1} + t^*\pi\frac{d^2}{4}$
   Volumenbilanz: $\Delta V = 2V - V^*$
   Wasserpegel im Glas: $t^* = t + \frac{\Delta V}{\pi(\frac{D^2}{4}-\frac{d^2}{4})}$
   Massenbilanz in Wasserpegelgleichung: $t^* = t + \frac{8V-4V^*}{\pi(D^2-d^2)}$
   $t^*$ in Lösung aus b) einsetzen und nach $V^*$ auflösen:
   $$\Rightarrow V^* = \frac{a^3 + t\pi\frac{d^2}{4} + \frac{2Vd^2}{D^2-d^2} - \frac{\rho_k a^3}{\rho_1}}{1 + \frac{d^2}{D^2-d^2}}$$
   $$\Delta V = 2V - \frac{a^3 + t\pi\frac{d^2}{4} + \frac{2Vd^2}{D^2-d^2} - \frac{\rho_k a^3}{\rho_1}}{1 + \frac{d^2}{D^2-d^2}} \qquad [m^3]$$

*Quelle: Herbst 2013*