

Tutorenprogramm - Strömungsmechanik I  
 Wintersemester 2013/14  
 Gemischte Aufgaben - Musterlösung

1. Aufgabe

1.  $G = F_A$

$$G = \varrho_W (V_B + V_{L_1}) \cdot g$$

$$G = \varrho_W \left( \frac{G}{g \cdot \varrho_B} + V_{L_1} \right) \cdot g$$

$$V_{L_1} = \frac{G}{g} \left( \frac{1}{\varrho_W} - \frac{1}{\varrho_B} \right)$$

$$\varrho_{L_1} = \frac{p_1}{R \cdot T_W} = \frac{p_a + \varrho_W g (H + h)}{R \cdot T_W}$$

$$m_{L_1} = \varrho_{L_1} \cdot V_{L_1}$$

$$m_{L_1} = \frac{G}{g} \left( \frac{1}{\varrho_W} - \frac{1}{\varrho_B} \right) \cdot \frac{p_a + \varrho_W g (H + h)}{R \cdot T_W}$$

2.  $G = F_A \quad \wedge \quad V_{L_1} = V_{L_2} = V_L$

$$G = \varrho_W (V_B + V_L) \cdot g$$

$$G = \varrho_W \left( \frac{G}{g \cdot \varrho_B} + A \cdot h \right) \cdot g$$

$$h = \frac{G}{g \cdot A} \left( \frac{1}{\varrho_W} - \frac{1}{\varrho_B} \right)$$

$$\varrho_{L_2} = \frac{p_a + \varrho_W g h}{R \cdot T_W}$$

$$m_{L_2} = \varrho_{L_2} \cdot A \cdot h = \frac{p_a + \varrho_W g h}{R T_W} \frac{G}{g} \left( \frac{1}{\varrho_W} - \frac{1}{\varrho_B} \right)$$

$$\Delta m = m_{L_1} - m_{L_2} = G \left( \frac{1}{\varrho_B} - \frac{1}{\varrho_W} \right) \frac{\varrho_W H}{R T_W}$$

Quelle: Frühjahr 2010

## 2. Aufgabe

1. stationärer Bernoulli: '0'-'1'

$$p_a + \rho g H_0 = p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 \left( 1 + \lambda \frac{L_1}{D_R} \right) + \rho g \frac{H_0}{2}$$

mit  $p_1 = p_a + \rho g h$

$$\rightarrow \rho g h = \frac{1}{2} \rho g H_0 - \frac{\rho}{2} v_1^2 \left( 1 + \lambda \frac{L_1}{D_R} \right)$$

mit Konti:  $\dot{V} = \frac{\pi D_R^2}{4} v_1 \rightarrow v_1 = \frac{4\dot{V}}{\pi D_R^2}$

$$h = \frac{1}{2} H_0 - \frac{8\dot{V}^2}{g\pi^2 D_R^4} \left( 1 + \lambda \frac{L_1}{D_R} \right)$$

2. Bernoulli von 'o'-'T':

$$p_a + \rho g (H_0 + H_T) = p_T + \frac{\rho}{2} v_T^2 \left( 1 + \lambda \frac{L_1 + L_2}{D_R} \frac{v_1^2}{v_T^2} + \lambda \frac{2L_3}{D_R} \right) + \Delta p_T$$

mit  $p_T = p_a + \rho g H_T$  und Konti  $\dot{V} = \frac{\pi D_R^2}{16} v_T \rightarrow v_T = \frac{16\dot{V}}{\pi D_R^2}$

$$\Delta p_T = \rho g H_0 - 128 \rho \frac{\dot{V}^2}{\pi^2 D_R^4} \left( 1 + \frac{1}{16} \lambda \frac{L_1 + L_2}{D_R} + 2\lambda \frac{L_3}{D_R} \right)$$

Die Leistung der Turbine berechnet sich zu

$$P_T = \Delta p_T \dot{V} = \dot{V} \left[ \rho g H_0 - 128 \rho \frac{\dot{V}^2}{\pi^2 D_R^4} \left( 1 + \frac{1}{16} \lambda \frac{L_1 + L_2}{D_R} + 2\lambda \frac{L_3}{D_R} \right) \right]$$

3. Die Leistung steigt, da bei größerem Austrittsquerschnitt und gleichem Volumenstrom eine geringere Geschwindigkeit und damit ein kleinerer Totaldruck hinter der Turbine herrscht. Somit steigt die Totaldruckdifferenz  $\Delta p_T$  an der Turbine und die Leistung nimmt zu.

4. instationärer Bernoulli von 'o'-'a':

$$p_a + \rho g H_0 = p_1 + \frac{\rho}{2} v_1(t)^2 + \rho L_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + \rho g \frac{H_0}{2}$$

mit  $p_1 = p_a + \rho g h(t)$

$$\rho g \frac{H_0}{2} = \rho g h(t) + \frac{\rho}{2} v_1(t)^2 + \rho L_1 \frac{dv_1(t)}{dt}$$

Kontinuität:

$$\frac{dh}{dt} A_s = v_1 \frac{\pi D_R^2}{4} \rightarrow v_1 = \frac{dh}{dt} \frac{4A_s}{\pi D_R^2}$$

$$\frac{H_0}{2} = h(t) + \frac{1}{2g} \left( \frac{4A_s}{\pi D_R^2} \right)^2 \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 + \frac{L_1}{g} \frac{4A_s}{\pi D_R^2} \frac{d^2 h}{dt^2}$$

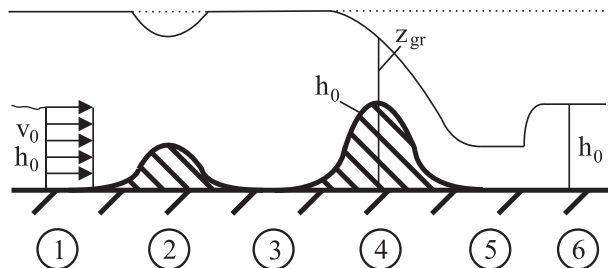
$$\frac{d^2 h}{dt^2} + \frac{1}{2L_1} \frac{4A_s}{\pi D_R^2} \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 + \frac{g}{L_1} \frac{\pi D_R^2}{4A_s} \left( h - \frac{H_0}{2} \right) = 0$$

$$\frac{d^2 h}{dt^2} + a_1 \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 + a_2 h - \frac{a_2}{2} H_0 = 0$$

Quelle: Herbst 2007

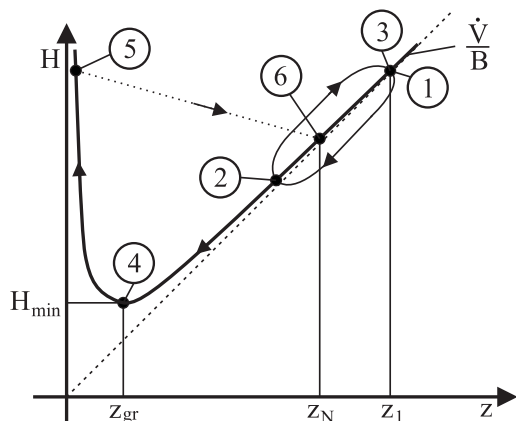
### 3. Aufgabe

#### 1. Skizze



Aufstau bei konstantem

$$\frac{\dot{V}}{B} = v_0 h_0$$



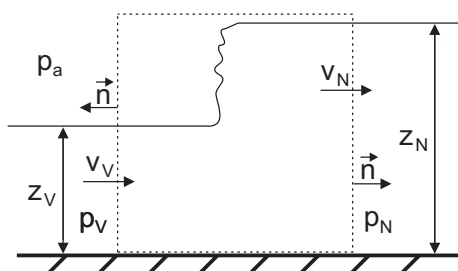
$$H_{ges} = H_{fluid} + y = konst$$

2.  $H_V + y_V = H_4 + y_4$  mit  $H_4 = H_{min}$ ,  $y_4 = h_0$  und  $y_V = 0$

$$H_V = h_0 + z_{gr} + \frac{\dot{V}^2}{2gz_{gr}^2 B^2}$$

$$\Rightarrow H_V = h_0 + \left(\frac{\dot{V}^2}{gB^2}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{V}^2}{gB^2}\right)^{1-\frac{2}{3}} = h_0 + \frac{3}{2} \left(\frac{v_0^2 h_0^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}}$$

#### 3. Energieverlust



Konti:  $v_N z_N = v_V z_V$

IES: Herleitung Skript S.126

$$\Rightarrow -\rho v_V^2 z_V + \rho v_N^2 z_N = \rho g \left(\frac{z_V^2}{2} - \frac{z_N^2}{2}\right)$$

$$\Delta H = H_N - H_V = z_N - z_V + \frac{\dot{V}^2}{2gB^2} \left(\frac{1}{z_N^2} - \frac{1}{z_V^2}\right)$$

mit IES und Konti:  $\frac{\dot{V}^2}{gB^2} = \frac{z_V z_N (z_V + z_N)}{2}$

$$\Rightarrow \Delta H = z_N - z_V + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{z_N^2} - \frac{1}{z_V^2}\right) z_V z_N (z_V + z_N)$$

Quelle: Frühjahr 2010