

Tutorenprogramm - Strömungsmechanik II
Wintersemester 2012/2013
Potentialströmungen - Musterlösung

1. Aufgabe

1. Parallelströmung + Senke

$$F(z) = u_\infty z + \frac{E}{2\pi} \ln z$$

2. $F(z) = u_\infty(x + iy) + \frac{E}{2\pi} \ln(re^{i\varphi})$

$$\rightarrow \phi = u_\infty x + \frac{E}{2\pi} \ln r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = u_\infty + \frac{Ex}{2\pi(x^2 + y^2)}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{Ey}{2\pi(x^2 + y^2)}$$

Staupunkt: $u = v = 0$; $v = 0 \rightarrow y_s = 0$, $u = 0 \rightarrow x_s = -\frac{E}{2\pi u_\infty}$

mit $E = -\frac{2\dot{V}}{B} \rightarrow x_s = \frac{\dot{V}/B}{\pi u_\infty}$, $y_s = 0$

Staupunktstromlinie:

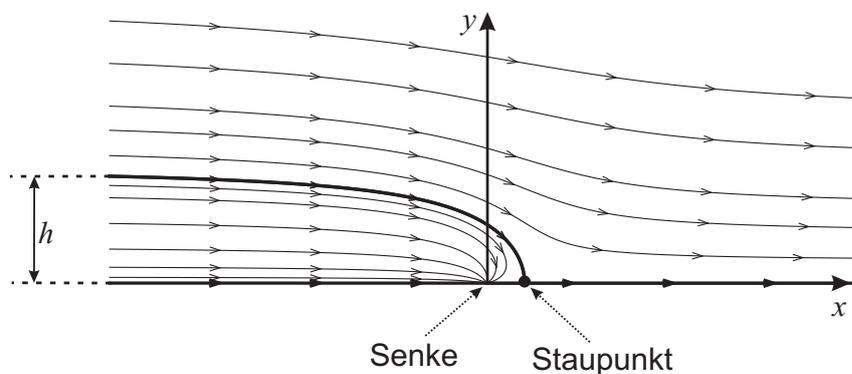
$$\Psi = u_\infty y + \frac{E}{2\pi} \varphi; \quad \varphi_s = \arctan(y_s/x_s) = 0, \quad y_s = 0 \Rightarrow \Psi_s = 0$$

$$0 = u_\infty r \sin \varphi + \frac{E}{2\pi} \varphi \Rightarrow r = \frac{\dot{V}}{\pi B u_\infty} \cdot \frac{\varphi}{\sin \varphi}$$

3. Volumenstrombilanz: $\dot{V} < h B u_\infty \Rightarrow h > \frac{\dot{V}}{B u_\infty}$

oder $h = \lim_{\varphi \rightarrow \pi} y = \lim_{\varphi \rightarrow \pi} r \sin \varphi = \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{\dot{V}}{\pi B u_\infty} \varphi = \frac{\dot{V}}{B u_\infty}$

4. Skizze:



Quelle: Herbst 2012

2. Aufgabe

1. Potentialfunktion:

$$\Phi(r, \varphi) = u_\infty r \cos \varphi + v_\infty r \sin \varphi + \frac{E}{2\pi} \ln r + \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi \text{ oder}$$

$$\Psi(r, \varphi) = u_\infty r \sin \varphi - v_\infty r \cos \varphi + \frac{E}{2\pi} \varphi - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

$$\Rightarrow v_r(r, \varphi) = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = u_\infty \cos \varphi + v_\infty \sin \varphi + \frac{E}{2\pi r}$$

$$\Rightarrow v_\varphi(r, \varphi) = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -u_\infty \sin \varphi + v_\infty \cos \varphi + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

2. Staupunkt:

$$v_r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{-E}{2\pi(u_\infty \cos \varphi + v_\infty \sin \varphi)}$$

$$v_\varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{-\Gamma}{2\pi(v_\infty \cos \varphi - u_\infty \sin \varphi)}$$

$$\Rightarrow -E(v_\infty \cos \varphi - u_\infty \sin \varphi) = -\Gamma(u_\infty \cos \varphi + v_\infty \sin \varphi)$$

$$-E(v_\infty - u_\infty \tan \varphi) = -\Gamma(u_\infty + v_\infty \tan \varphi)$$

$$\Rightarrow \varphi = \arctan \left(\frac{Ev_\infty - \Gamma u_\infty}{\Gamma v_\infty + Eu_\infty} \right)$$

$$\text{Berechne } v_\infty \text{ so, dass } \varphi_s = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Ev_\infty - \Gamma u_\infty}{\Gamma v_\infty + Eu_\infty} = 1$$

$$v_\infty(E - \Gamma) = u_\infty(E + \Gamma) \quad \Rightarrow \quad v_\infty = u_\infty \frac{E + \Gamma}{E - \Gamma}$$

Koordinaten des Staupunktes: $\varphi_s = \frac{\pi}{4}$

$$r_s = \frac{-E}{2\pi \left(u_\infty \frac{1}{\sqrt{2}} + u_\infty \frac{E + \Gamma}{E - \Gamma} \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}$$

$$= -\frac{(E - \Gamma)}{2\sqrt{2}\pi u_\infty}$$

3. Stromfunktion:

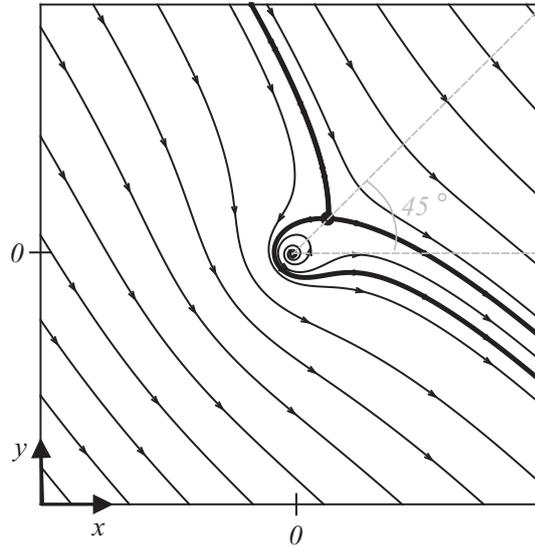
$$\Psi(r, \varphi) = u_\infty r \sin \varphi - v_\infty r \cos \varphi + \frac{E}{2\pi} \varphi - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

$$\text{Punkt } London \text{ hat Koordinaten } r = 1, \varphi = -\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \Psi_L = -\frac{u_\infty}{\sqrt{2}} - \frac{v_\infty}{\sqrt{2}} - \frac{E}{2\pi} \frac{\pi}{4} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln 1$$

$$= -\frac{u_\infty}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{E + \Gamma}{E - \Gamma} \right) - \frac{E}{8} = -\frac{\sqrt{2}u_\infty E}{E - \Gamma} - \frac{E}{8}$$

Stromfunktion im Ursprung: $\Psi(0, 0) \rightarrow \infty$

4. Berechne erst den Wert der Stromfunktion auf der Staupunktstromlinie Ψ_s . Der Ursprung liegt sicher in der Aschewolke (Quelle der Aschewolke liegt im Ursprung) und besitzt ein Maximum der Stromfunktion. Daher entscheide, ob $\Psi_L \in [\Psi_s, \Psi(0, 0)]$. In diesem Fall befindet sich London unter der Aschewolke. Andernfalls befindet sich saubere Luft über London.
5. Skizze:



Quelle: Herbst 2010

3. Aufgabe

- $|\Gamma| < |\Gamma_{gr}|$: Zwei Staupunkte auf der Oberfläche des Zylinders. Staupunkte liegen auf der Unterseite des Zylinders. Strömung auf der Oberseite beschleunigt.

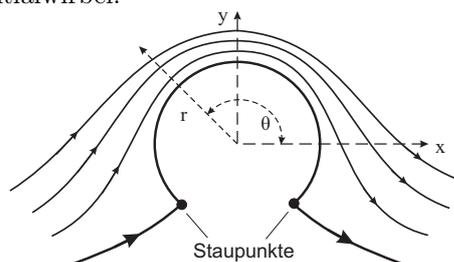
$|\Gamma| = |\Gamma_{gr}|$: Staupunkte laufen in einem Punkt auf der Zylinderoberfläche zusammen. Dieser Punkt liegt auf der y -Achse auf der Unterseite des Zylinders.

$|\Gamma| > |\Gamma_{gr}|$: Der Staupunkt entfernt sich entlang der y -Achse von der Zylinderoberfläche.

Anm. für Korrektur: eindeutige Skizzen sind auch o.k.

- Parallelströmung in x -Richtung + Dipol + Potentialwirbel:

$$F(z) = u_a z + \frac{M}{2\pi z} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z = u_a r e^{i\theta} + \frac{M}{2\pi r} e^{-i\theta} - \frac{i\Gamma}{2\pi} (\ln r + i\theta)$$



$$3. \quad F(z) = u_a r (\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{M}{2\pi r} (\cos \theta - i \sin \theta) - \frac{\Gamma}{2\pi} (i \ln r - \theta)$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \operatorname{Re}(F(z)) = u_a r \cos \theta + \frac{M}{2\pi r} \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad \text{oder}$$

$$\Rightarrow \quad \psi = \operatorname{Im}(F(z)) = u_a r \sin \theta - \frac{M}{2\pi r} \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

Geschwindigkeitskomponenten:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = u_a \cos \theta - \frac{M}{2\pi r^2} \cos \theta$$

$$\text{Kontur des Vorsprungs: } v_r(R) = 0 \quad \Rightarrow \quad M = 2\pi R^2 u_a$$

$$\text{Staupunkt: } v_\theta \left(R, \theta_S = \frac{3}{2}\pi \pm \frac{\alpha}{2} \right) = 0$$

$$v_\theta(R, \theta_S) = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -u_a \sin \theta_S - \frac{2\pi R^2 u_a}{2\pi R^2} \sin \theta_S + \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

$$= -2u_a \sin \theta_S + \frac{\Gamma}{2\pi R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma = 4\pi R u_a \sin \theta_S = 4\pi R u_a \sin \left(\frac{3}{2}\pi \pm \frac{\alpha}{2} \right)$$

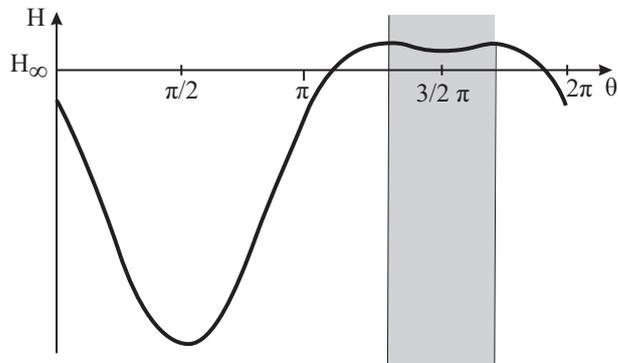
$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin \left(\frac{3}{2}\pi \pm \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \Gamma = -2\sqrt{2}\pi R u_a$$

4. Bernoulli: $p_\infty + \frac{1}{2}\rho u_a^2 + \rho g H_\infty = p_\infty + \frac{1}{2}\rho u^2(R, \theta) + \rho g H(R, \theta)$

mit $u(R, \theta) = v_\theta(R)$:

$$u^2(R, \theta) = \left(-2u_a \sin \theta - \frac{2\sqrt{2}R\pi u_a}{2\pi R} \right)^2 = u_a^2 (2 \sin \theta + \sqrt{2})^2$$

$$H(R, \theta) = H_\infty + \frac{u_a - u^2(R, \theta)}{2g} = H_\infty + \frac{u_a^2}{2g} \left[1 - (2 \sin \theta + \sqrt{2})^2 \right]$$



Quelle: Frühjahr 2010

4. Aufgabe

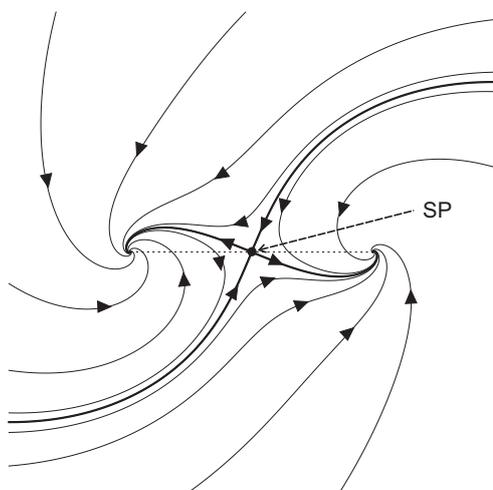
1. $F(z)$ setzt sich aus zwei Potentialwirbeln und zwei Senken zusammen:

$$F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z - \frac{E}{2\pi} \ln z - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z-k) - \frac{E}{2\pi} \ln(z-k)$$

$$\Gamma > 0, \quad E > 0$$

2. Wirbel gleicher Stärke und gleichen Drehsinns: Es existiert ein Staupunkt auf der Verbindungslinie zwischen beiden Wirbeln, d.h. bei $x = \frac{k}{2}$ (Symmetrie).

3. Skizze: Staupunktstromlinien sind dick gezeichnet



4. Beitrag von Wirbelsturm ① zum Strömungsfeld:

$$F_1(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z - \frac{E}{2\pi} \ln z$$

$$\overline{w}_1 = u_1 - iv_1 = \frac{dF_1}{dz} = -\frac{i\Gamma + E}{2\pi} \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow u_{ind,1 \rightarrow 2} = u_1(x=k, y=0) = \frac{-E}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_{x=k, y=0} - \frac{\Gamma y}{2\pi(x^2 + y^2)} \Big|_{x=k, y=0}$$

$$= \frac{-E}{2\pi k} < 0$$

Wirbelsturm ① induziert im Zentrum von Wirbelsturm ② eine Geschwindigkeit in negative x -Richtung. Umgekehrt induziert Wirbelsturm ② im Zentrum von Sturm ① eine Geschwindigkeit in positive x -Richtung. Der Abstand der Wirbelstürme wird also aufgrund der Senken kleiner.

5. Zirkulation von Wirbelsturm ① wird erhöht.

Betrachte zunächst Geschwindigkeitsbeiträge der beiden Wirbel:

- Umfangsgeschwindigkeit von Wirbel ① wird erhöht
- Höhere Umfangsgeschwindigkeit von Wirbel ② wird benötigt, um Beitrag von Wirbel ① auszugleichen
- Staupunkt verschiebt sich in Richtung von Wirbel ②, da näher an dessen Zentrum höhere Umfangsgeschwindigkeiten herrschen.

Betrachte nun Geschwindigkeitsbeiträge der beiden Quellen:

- Näher am Zentrum von Sturm ② werden durch Senke ② höhere radiale Geschwindigkeiten in Richtung ② als durch Senke ① in Richtung ① induziert (Konti).
- Also kann der Staupunkt nicht auf der x -Achse liegen, sondern muss sich zusätzlich in y -Richtung verschieben.
- (Der Staupunkt muss nach oben (pos. y -Richtung) wandern, da hier die Geschwindigkeitsbeiträge der beiden Wirbel eine Komponente in Richtung Sturm ① haben.)

Quelle: Frühjahr 2012