Tutorenprogramm - Strömungsmechanik II
Wintersemester 2012/2013
Gemischte Aufgaben - Musterlösung

1. Aufgabe

1. $90°$ gedrehter Dipol: Multiplikation mit $i \quad \Rightarrow \quad F(z) = \dfrac{iM}{2\pi z}$

   - oder -

   Drehung mittels $\varphi^* = \varphi - \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad F(z) = \dfrac{M}{2\pi r e^{i(\varphi - \pi/2)}}$

   $= \dfrac{M}{2\pi r e^{i\varphi}} e^{i\pi/2} = \dfrac{M}{2\pi z}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{iM}{2\pi z}$

   Komplexe Potentialfunktion des gesamten Strömungsfeldes: $F(z) = \dfrac{iM}{2\pi z} + u_\infty z$

2. $\Psi = \dfrac{Mx}{2\pi(x^2+y^2)} + u_\infty y \quad$ oder $\quad \Phi = \dfrac{My}{2\pi(x^2+y^2)} + u_\infty x$

   $u = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = -\dfrac{2Mxy}{2\pi(x^2+y^2)^2} + u_\infty = -\dfrac{M\sin\varphi\cos\varphi}{\pi r^2} + 1$

   $v = \dfrac{M(x^2-y^2)}{2\pi(x^2+y^2)^2} = \dfrac{M(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{2\pi r^2}$

3. $v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2\varphi = \cos^2\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \dfrac{(2n-1)\pi}{4} \quad n = 1\ldots 4$

   oder $\quad r \to \pm\infty$

4. Staupunkte: $u = v = 0$

   $v = 0$ aus Teilaufgabe c) $\quad \Rightarrow \quad$ einsetzen in u:

   $u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \dfrac{M\sin\varphi\cos\varphi}{\pi r^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\pi r^2}{M} = \sin\varphi\cos\varphi$

   Mit $\varphi = \pi/4$ oder $\varphi = 5\pi/4$ folgt: $\sin\varphi\cos\varphi = 1/2$

   Mit $\varphi = 3\pi/4$ oder $\varphi = 7\pi/4$ folgt: $\sin\varphi\cos\varphi = -1/2$

   Da $r = R = 1$ und $M < 0$ gefordert, muss gelten: $\dfrac{\pi}{M} = -\dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad M = -2\pi$

   und somit $\varphi_1 = 3\pi/4$ oder $\varphi_2 = 7\pi/4 \quad \Rightarrow (r_{S1}, \varphi_{S1}) = (1, 3\pi/4), \quad (r_{S2}, \varphi_{S2}) = (1, 7\pi/4)$.

5. Staupunktstromlinien: $\quad \Psi = \dfrac{Mr\cos\varphi}{2\pi r^2} + u_\infty r \sin\varphi$

   $\Psi_1 = \Psi(\varphi_1 = 3\pi/4, R = 1) = \dfrac{2\pi \cdot 1/\sqrt{2}}{2\pi} + 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}$

   $\Psi_2 = \Psi(\varphi_1 = 7\pi/4, R = 1) = \dfrac{-2\pi \cdot 1/\sqrt{2}}{2\pi} - 1/\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

Linie 1: $\sqrt{2} = \frac{-2\pi r\cos\varphi}{2\pi r^2} + r\sin\varphi = -\frac{\cos\varphi}{r} + r\sin\varphi$

$\Rightarrow r^2\sin\varphi - \sqrt{2}r - \cos\varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_{1,2} = \frac{1}{2\sin\varphi}\left(\sqrt{2} \pm \sqrt{2 + 4\sin\varphi\cos\varphi}\right)$

Linie 2: $-\sqrt{2} = -\frac{\cos\varphi}{r} + r\sin\varphi$

$\Rightarrow r^2\sin\varphi + \sqrt{2}r - \cos\varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_{3,4} = \frac{1}{2\sin\varphi}\left(-\sqrt{2} \pm \sqrt{2 + 4\sin\varphi\cos\varphi}\right)$

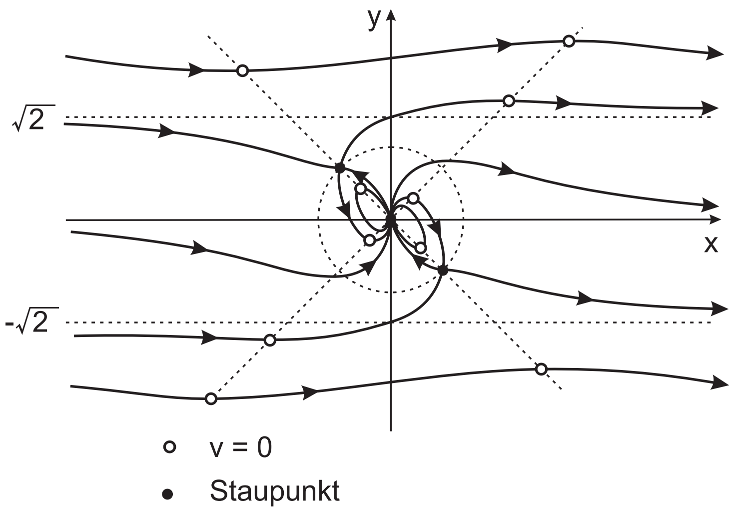
6. Obere Staupunktstromlinie ist Stromlinie gehörend zu $R = 1, \varphi = \varphi_1 = 3\pi/4$, also Linie 1.

   Asymptote: $y_1 = r\sin\varphi = \sqrt{2} + \frac{\cos\varphi}{r}$

   Mit $r \to \infty$ folgt $\varphi \to 0$ oder $\varphi \to \pi$. In beiden Fällen gilt:

   $\lim_{r\to\infty} y_1 = \sqrt{2}$.

7. Stromlinienbild:



Quelle: Herbst 2011

2. Aufgabe

1. $\frac{u}{U} = a_0 + a_1 \left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + a_4 \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$
   Randbedingungen:
   1.) $\frac{u}{U} = 0$ für $\frac{y}{\delta} = 0$
   2.) $\frac{u}{U} = 1$ für $\frac{y}{\delta} = 1$
   3.) $\frac{\partial^2\left(\frac{u}{U}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)^2} = 0$ für $\frac{y}{\delta} = 0$
   4.) $\frac{\partial\left(\frac{u}{U}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)} = 0$ für $\frac{y}{\delta} = 1$
   5.) $\frac{\partial^2\left(\frac{u}{U}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)^2} = 0$ für $\frac{y}{\delta} = 1$
   mit 1.) $\Rightarrow a_0 = 0$
   mit 2.) $\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$
   mit 3.) $\Rightarrow a_2 = 0$
   mit 4.) $\Rightarrow a_1 + 3a_3 + 4a_4 = 0$
   mit 5.) $\Rightarrow 6a_3 + 12a_4 = 0$
   Damit folgt: $a_1 = 2, \quad a_3 = -2, \quad a_4 = 1$ und $\frac{u}{U} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$

2. 1.) Verdrängungsdicke: Abstand, um den der Körper in einer reibungsfreien Strömung aufgedickt werden muß, so dass sich der gleiche Massenstrom wie in der tatsächlichen Strömung ergibt (Skizze siehe Skript S.257).
   2.) Impulsverlustdicke: $\rho U^2 \delta_2$ muß den Impulsverlust aufgrund der Grenzschicht darstellen.

3. $\frac{\delta_2}{\delta} = \int\limits_0^1 \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{37}{315}$
   die von Kármánsche Integralbeziehung ergibt für das ebene Problem:
   $\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{\tau(y=0)}{\varrho U^2} = 0$
   $\tau(y=0) = -\frac{\eta U}{\delta} \frac{\partial\left(\frac{u}{U}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)}|_{\frac{y}{\delta}=0} = -2\frac{\eta U}{\delta}$
   $\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{2\eta U}{\delta \varrho U^2} = \frac{2\eta}{\varrho \delta U}$
   $\frac{37}{315}\frac{d\delta}{dx} = \frac{2\eta}{\varrho \delta U}$
   $\delta d\delta = \frac{315}{37} 2 \frac{\eta}{\varrho U} dx$
   $\frac{\delta^2}{2} = \frac{315}{37} 2 \frac{\eta}{\varrho U} x$
   $\delta^2 = \frac{1260}{37} \frac{\eta}{\varrho U} x$
   $\frac{\delta}{x} = \frac{5.84}{\sqrt{Re_x}}$

4. $h_E = \delta(L) = \frac{5.84}{\sqrt{\frac{\varrho U}{\eta L}}}$

Quelle: Herbst 2006

3. Aufgabe

1. $u_1 = Ma_1 c_1 = Ma_1\sqrt{\gamma R T_1} = 583,7 m/s$

   Energiegleichung: $c_p T_0 = c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2}$

   $\rightarrow T_{01} = T_1 + \frac{u_1^2}{2c_p} = T_1 + \frac{u_1^2}{2\gamma R}(\gamma - 1) = 381,6K$

2. Mit Hinweis: $(Ma_1^\star)^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + 2/Ma_1^2} \quad \rightarrow Ma_1^\star = 1.63$

   Über den senkrechten Verdichtungsstoß gilt: $Ma_2^\star = \frac{1}{Ma_1^\star} = 0.61$

   $\rightarrow u_2 = Ma_2^\star c^\star = Ma_2^\star \frac{u_1}{Ma_1^\star} = 218,4 m/s$

   $T_2 = T_{01} - \frac{u_2^2}{2\gamma R}(\gamma - 1) = 357,9K$

3. Konti: $\varrho_2 u_2 A_2 = \varrho_3 u_3 A_3 \quad \rightarrow \quad A_3 = A_2 \frac{u_2}{u_3}\frac{\varrho_2}{\varrho_3}$

   Energiegleichung: $\frac{u_3^2}{2} + c_p T_3 = \frac{u_2^2}{2} + c_p T_2$

   Mit $A_2 = A_1$ und $\frac{u_3}{u_2} = 0,9$: $\frac{T_3}{T_2} = 1 + (1 - 0,9^2)\frac{u_2^2}{2\gamma R T_2}(\gamma - 1)$

   Mit $\frac{\varrho_3}{\varrho_2} = \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$: $A_3 = A_2\left[1 + 0,19\frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{u_2^2}{2RT_2}\right]^{-\frac{1}{\gamma-1}} \frac{1}{0,9} = 0,1077 m^2$

   $T_3 = T_{01} - \frac{0,9^2 u_2^2}{2\gamma R}(\gamma - 1) = 362,4K$

Quelle: Herbst 2008