

Tutorenprogramm - Strömungsmechanik II  
 Wintersemester 2013/14  
 Ähnlichkeitstheorie - Musterlösung

1. Aufgabe

Variablen des Systems:  $\eta, \rho, H, D, F_W, f, u_\infty$  mit

$$\eta \doteq \left[ \frac{kg}{m \cdot s} \right], \rho \doteq \left[ \frac{kg}{m^3} \right], H \doteq [m], D \doteq [m],$$

$$F_W \doteq \left[ \frac{kg \cdot m}{s^2} \right], f \doteq \left[ \frac{1}{s} \right], u_\infty \doteq \left[ \frac{m}{s} \right],$$

$\Rightarrow$  sieben Einflußgrößen, drei Grunddimensionen  $\rightarrow$  vier Kennzahlen  
 wähle drei wiederkehrende Variablen, z.B.:  $\rho, u_\infty, D$

$$K_1 = \eta \cdot u_\infty^{\alpha_1} \cdot \rho^{\beta_1} \cdot D^{\gamma_1}$$

$$kg : 1 + 0 + \beta_1 + 0 = 0 \Rightarrow \beta_1 = -1$$

$$m : -1 + \alpha_1 - 3\beta_1 + \gamma_1 = 0 \Rightarrow \gamma_1 = -1$$

$$s : -1 - \alpha_1 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -1$$

$$\Rightarrow K_1 = \frac{\eta}{\rho u_\infty D} = \frac{1}{Re}$$

$$K_2 = F_W \cdot u_\infty^{\alpha_2} \cdot \rho^{\beta_2} \cdot D^{\gamma_2}$$

$$kg : 1 + 0 + \beta_2 + 0 = 0 \Rightarrow \beta_2 = -1$$

$$m : 1 + \alpha_2 - 3\beta_2 + \gamma_2 = 0 \Rightarrow \gamma_2 = -2$$

$$s : -2 - \alpha_2 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -2$$

$$\Rightarrow K_2 = \frac{F_W}{\rho u_\infty^2 D^2} = \bar{c}_w$$

$$K_3 = H \cdot u_\infty^{\alpha_3} \cdot \rho^{\beta_3} \cdot D^{\gamma_3}$$

$$kg : 0 + 0 + \beta_3 + 0 = 0 \Rightarrow \beta_3 = 0$$

$$m : 1 + \alpha_3 + 0 + \gamma_3 = 0 \Rightarrow \gamma_3 = -1$$

$$s : 0 - \alpha_3 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$$

$$K_3 = \frac{H}{D} = \text{geometr.}$$

$$K_4 = f \cdot u_\infty^{\alpha_4} \cdot \rho^{\beta_4} \cdot D^{\gamma_4}$$

$$kg : 0 + 0 + \beta_4 + 0 = 0 \Rightarrow \beta_4 = 0$$

$$m : 0 + \alpha_4 - 3\beta_4 + \gamma_4 = 0 \Rightarrow \gamma_4 = 1$$

$$s : -1 - \alpha_4 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_4 = -1$$

$$\Rightarrow K_4 = \frac{fD}{u_\infty} = Sr$$

Alternativ: Variablen des Systems:  $\eta, \rho, H, D, F_W, f, u_\infty, T, R$  mit zusätzlich (zu oben)  $T \doteq [K], R \doteq \left[ \frac{m^2}{s^2 K} \right]$

$\Rightarrow$  neun Einflußgrößen, vier Grunddimensionen  $\rightarrow$  fünf Kennzahlen  
wähle vier wiederkehrende Variablen, z.B.:  $\rho, u_\infty, D, T$

Die ersten vier Kennzahlen sind unverändert zu oben ( $[K]$  kommt nur in  $T$  und  $R$  vor), also nur noch zusätzliche Kennzahl  $K_5$  bestimmen:

$$K_5 = R \cdot u_\infty^{\alpha_5} \cdot \rho^{\beta_5} \cdot D^{\gamma_5} \cdot T^{\delta_5}$$

$$kg : 0 + 0 + \beta_5 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \beta_5 = 0$$

$$m : 2 + \alpha_5 - 3\beta_5 + \gamma_5 + 0 = 0 \Rightarrow \gamma_5 = 0$$

$$s : -2 - \alpha_5 + 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_5 = -2$$

$$T : -1 + 0 + 0 + 0 + \delta_5 = 0 \Rightarrow \delta_5 = 1$$

$$\Rightarrow K_5 = \frac{RT}{u_\infty^2} = \frac{\gamma RT}{\gamma u_\infty^2} = \frac{1}{\gamma M^2}$$

Quelle: *Frühjahr 2012*

## 2. Aufgabe

1. 6 Einflußgrößen  $f, u_\infty, D, L, \eta, \varrho$   
3 Grunddimensionen (M/L/T)  $\Rightarrow$  3 Kennzahlen

$$\Pi_1 = f \varrho^\alpha u^\beta D^\gamma \Rightarrow M^0 L^0 T^0 = T^{-1} (ML^{-3})^\alpha (LT^{-1})^\beta L^\gamma$$

$$M: 0 = \alpha$$

$$L: 0 = -3\alpha + \beta + \gamma \Rightarrow \beta = -\gamma$$

$$T: 0 = -1 - \beta \Rightarrow \beta = -1$$

$$\Rightarrow \alpha = 0, \beta = -1, \gamma = 1$$

$$\Rightarrow \Pi_1 = \frac{fD}{u}$$

$$\Pi_2 = \eta \varrho^\alpha u^\beta D^\gamma \Rightarrow M^0 L^0 T^0 = ML^{-1} T^{-1} (ML^{-3})^\alpha (LT^{-1})^\beta L^\gamma$$

$$M: 0 = 1 + \alpha \Rightarrow \alpha = -1$$

$$L: 0 = -1 - 3\alpha + \beta + \gamma \Rightarrow \gamma = -2 - \beta$$

$$T: 0 = -1 - \beta \Rightarrow \beta = -1$$

$$\Rightarrow \alpha = -1, \beta = -1, \gamma = -1$$

$$\Rightarrow \Pi_2 = \frac{\eta}{\varrho u D}$$

$$\Pi_3 = L_0 \varrho^\alpha u^\beta D^\gamma \Rightarrow M^0 L^0 T^0 = L (ML^{-3})^\alpha (LT^{-1})^\beta L^\gamma$$

$$M: 0 = \alpha$$

$$L: 0 = 1 - 3\alpha + \beta + \gamma \Rightarrow \gamma = -\beta - 1$$

$$T: 0 = -\beta$$

$$\Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = -1$$

$$\Rightarrow \Pi_3 = \frac{L}{D}$$

2.  $Re = \frac{\varrho v D}{\eta}, Sr = \frac{D f}{u_\infty}$

$$\Rightarrow D = \frac{S r u_\infty}{f_r}$$

$$Re = \frac{S r u_\infty^2}{\nu f_r}, \quad u_\infty = \sqrt{\frac{Re \nu f_r}{S r}} = 0.339 m/s$$

3. Es ist  $f_r = \frac{S r u_\infty}{D} \Rightarrow D = \frac{S r u_\infty}{f_r}$ .

Damit steigt die Frequenz mit höherer Geschwindigkeit und sinkt bei größerem Durchmesser. Die Ablösefrequenz darf die Resonanzfrequenz nicht erreichen, d.h.  $f < 40 \frac{1}{s}$ . Damit folgt unmittelbar  $D > 0.05 m$ , womit die Bedingung  $D > 1 cm$  erfüllt ist.

Quelle: Herbst 2007

### 3. Aufgabe

1. Die Prandtlzahl ist dann von Bedeutung, wenn die Wärmeübertragung in einer Strömung eine Rolle spielt.
2. 5 Einflußgrößen ( $\Delta p, D, \omega, \rho, \dot{V}$ ), 3 Grunddimensionen (kg, m, s)  $\Rightarrow$  2 Kennzahlen  
Wähle  $D, \rho$  und  $\omega$  als sich wiederholende Variable.

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \Delta p D^\alpha \omega^\beta \rho^\gamma \\
 1 &= \left( \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2} \right) (\text{m})^\alpha (\text{s}^{-1})^\beta \left( \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)^\gamma \\
 \text{kg} &: \quad 0 = 1 + \gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = -1 \\
 \text{s} &: \quad 0 = -2 - \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = -2 \\
 \text{m} &: \quad 0 = -1 + \alpha - 3\gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha = -2 \\
 \Rightarrow K_1 &= \frac{\Delta p}{D^2 \rho \omega^2} \quad \Rightarrow \quad K_1 = \frac{\Delta p}{\rho v^2} = Eu \quad \text{mit} \quad v = D\omega
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_2 &= \dot{V} D^\alpha \omega^\beta \rho^\gamma \\
 1 &= \left( \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right) (\text{m})^\alpha (\text{s}^{-1})^\beta \left( \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)^\gamma \\
 \text{kg} &: \quad 0 = \gamma \\
 \text{s} &: \quad 0 = -1 - \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = -1 \\
 \text{m} &: \quad 0 = 3 + \alpha - 3\gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha = -3 \\
 \Rightarrow K_2 &= \frac{\dot{V}}{D^3 \omega} \quad \Rightarrow \quad K_2 = \frac{\bar{u}}{D\omega} = \frac{1}{Sr} \quad \text{mit} \quad \bar{u} = \frac{\dot{V}}{D^2}, \quad f = \omega
 \end{aligned}$$

3. Die Kennzahlen ( $Re, M$ ) des Modells müssen gleich den Kennzahlen des Flugzeugs sein.

Die Geschwindigkeit im Windkanal beträgt bei  $M_F$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{u_K}{c_K} &= M_K = M_F \\
 u_K &= M_F \cdot c_K = M_F \cdot \sqrt{\gamma R T_K}
 \end{aligned}$$

Die dynamische Viskosität im Windkanal beträgt bei  $M_F$ :

$$\eta_K = \eta_0 \cdot (T_K/T_0)^a \cdot b$$

Bei einer vorgegebenen Reynolds Zahl ergibt sich die charakteristische Länge  $L$  zu:

$$Re_F = \frac{\rho_K u_K L}{\eta_K} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\eta_K Re_F}{\rho_K u_K} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\eta_0 \cdot \left( \frac{T_K}{T_0} \right)^a b Re_F}{\rho_K M_F \sqrt{\gamma R T_K}}$$

4. Eine mögliche Maßnahme ist die Verringerung der Temperatur, wodurch die Reynolds Zahl bei konstanter Länge  $L$  ansteigt bzw. bei konstanter Reynolds Zahl die Länge  $L$  kleiner wird.

$$Re = \frac{\rho M \sqrt{\gamma R T} L}{\eta_0 \cdot \left( \frac{T}{T_0} \right)^a b} \rightarrow Re \sim L \cdot T^{(0.5-a)}$$

#### 4. Aufgabe

1.
  - Energieerhaltungsgleichung für kompressible Strömungen unter Vernachlässigung von Reibungseffekten.
  - Gültig für ein ideales Gas mit konstanter spezifischer Wärmekapazität und Temperaturleitfähigkeit.
2. Dimensionslose Größen:

$$\bar{\varrho} = \frac{\varrho}{\varrho_\infty}, \bar{T} = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty} = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}, \bar{t} = \frac{t}{\Delta t}, \bar{p} = \frac{p}{\Delta p}, \bar{v} = \frac{v}{u_\infty}, \bar{\nabla} = \nabla L.$$

$$\begin{aligned} \varrho_\infty c_V \bar{\varrho} \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \frac{u_\infty}{L} \Delta T \bar{v} \cdot \bar{\nabla} \bar{T} \right) &= \frac{\lambda}{L^2} \Delta T \bar{\nabla}^2 \bar{T} - \frac{\Delta p u_\infty}{L} \bar{p} (\bar{\nabla} \cdot \bar{v}) \\ \frac{\varrho_\infty u_\infty c_V \Delta T}{L} \left( \frac{L}{u_\infty \Delta t} \bar{\varrho} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{\varrho} \bar{v} \cdot \bar{\nabla} \bar{T} \right) &= \frac{\lambda}{L^2} \Delta T \bar{\nabla}^2 \bar{T} - \frac{\Delta p u_\infty}{L} \bar{p} (\bar{\nabla} \cdot \bar{v}) \\ \underbrace{\frac{L}{u_\infty \Delta t} \bar{\varrho} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}}}_{K_1} + \bar{\varrho} \bar{v} \cdot \bar{\nabla} \bar{T} &= \underbrace{\frac{\lambda}{\varrho_\infty u_\infty L c_V} \bar{\nabla}^2 \bar{T}}_{K_2} - \underbrace{\frac{\Delta p}{\varrho_\infty c_V \Delta T} \bar{p} (\bar{\nabla} \cdot \bar{v})}_{K_3} \end{aligned}$$

3. inkompressible Strömung:  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ , stationäre Strömung:  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

$$\rightarrow \varrho c_V \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Einführen dimensionsloser Größen:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{\delta}, \bar{u} = \frac{u}{u_\infty}, \bar{v} = \frac{v}{\frac{\delta u_\infty}{L}}, \bar{T} = \frac{T - T_\infty}{\Delta T},$$

$$\begin{aligned} \varrho c_V \left( \frac{u_\infty \Delta T}{L} \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \frac{\delta u_\infty}{L} \Delta T \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) &= \lambda \left( \frac{\Delta T}{L^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\Delta T}{\delta^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\lambda L}{\varrho u_\infty \delta^2 c_V} \left( \underbrace{\frac{\delta^2}{L^2}}_{\approx 0} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\lambda L}{\varrho u_\infty \delta^2 c_V} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \end{aligned}$$

Quelle: Frühjahr 2008