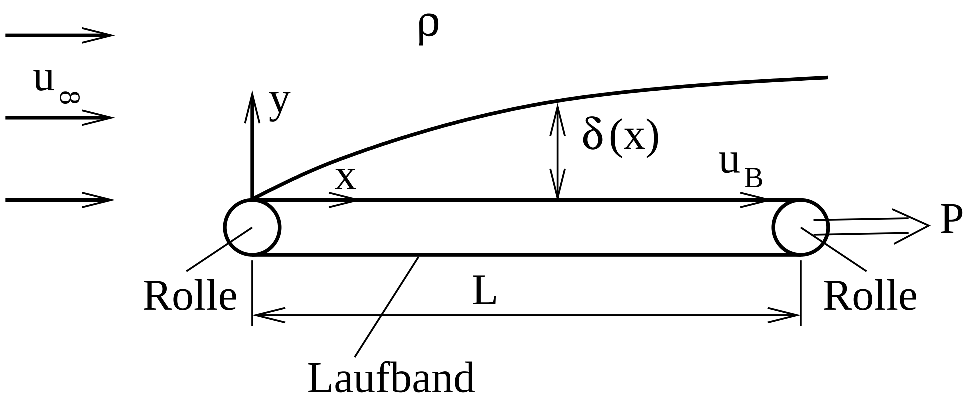
Tutorenprogramm - Strömungsmechanik II
Wintersemester 2012/2013
Laminare Grenzschichten

1. Aufgabe

Die unten skizzierte Anordnung besteht aus zwei reibungsfrei gelagerten Rollen, über die ein Laufband gespannt ist. Die Oberseite des Bandes wird mit der Geschwindigkeit u_∞ mit einem inkompressiblen Newtonschen Fluid (Dichte ρ, Viskosität η) angeströmt. An einer der beiden Rollen wird die Leistung P abgegriffen und gleichzeitig die Bandgeschwindigkeit u_B gemessen. Das Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht soll durch folgenden Ansatz angenähert werden:

$$\frac{u(x,y)}{u_\infty} = a_0 + a_1\left(\frac{y}{\delta}\right)$$



1. Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsprofil $u(y/\delta)$ in der Grenzschicht.
2. Skizzieren Sie sorgfältig das Geschwindigkeitsprofil dieser Grenzschicht und das Geschwindigkeitsprofil der um die Verdrängungsdicke versetzten reibungsfreien Außenströmung für $K = 0,5$. Begründen Sie die Lage der Verdrängungsdicke.
3. Bestimmen Sie den Verlauf der Grenzschichtdicke $\delta(x)$.
4. Bestimmen Sie die an der Rolle abgegriffene Leistung pro Breite des Bandes P/B.

Gegeben: u_∞ , ρ , η , L , $\frac{u_B}{u_\infty} = K$ mit $0 \leq K \leq 1$

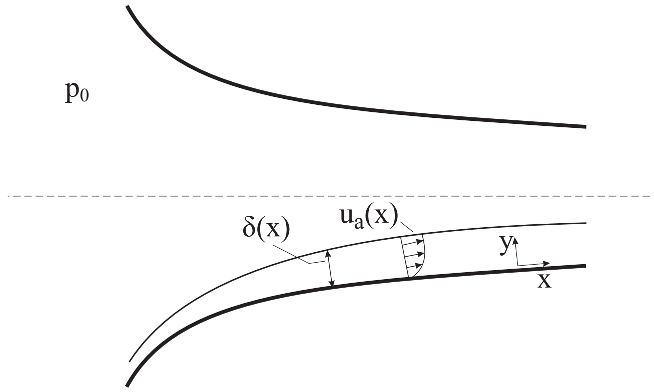
Hinweis: von Kármánsche Integralbeziehung

$$\frac{\mathrm{d}\delta_2}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{u_a}\frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}x}(2\delta_2 + \delta_1) - \frac{\tau_W}{\rho u_a^2} = 0$$

Quelle: Frühjahr 2011

2. Aufgabe

Ein konvergenter Kanal wird von einem inkompressiblen Gas (Dichte ρ, Zähigkeit η) durchströmt. An den gekrümmten Begrenzungswänden bilde sich eine selbstähnliche Grenzschicht mit der Dicke $\delta(x)$ aus. Die Krümmung der Wände sei klein.



Das Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht lasse sich durch folgenden Polynomansatz darstellen:

$$\frac{u(x,y)}{u_a(x)} = a_0 + a_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)$$

Der Druckverlauf wurde gemessen:

$$p(x) = p_0 - C\frac{x^2}{2}$$

1. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_0 und a_1 des Geschwindigkeitsprofils.
2. Bestimmen Sie den Verlauf der Außengeschwindigkeit $u_a(x)$ unter der Bedingung $u_a(x=0) = 0$.
3. Bestimmen Sie, in Abhängigkeit der Grenzschichtdicke δ und der Außengeschwindigkeit $u_a(x)$, die Verdrängungsdicke δ_1, die Impulsverlustdicke δ_2 und die Schubspannung auf der Kanalwand $\tau(y=0)$.
4. Bestimmen Sie den Verlauf der Grenzschichtdicke $\delta(x)$ für $x \geq x_0 > 0$ mit der von Kármánschen Integralbeziehung. Die Grenzschichtdicke $\delta(x_0) = \delta_0$ sei bekannt.

Gegeben: ρ, η, δ_0, C

Hinweise:

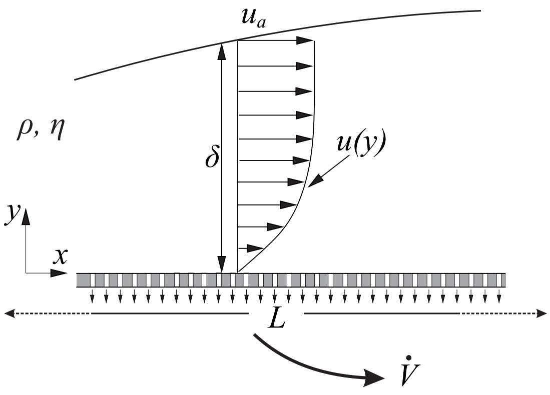
- Von Kármánsche Integralbeziehung: $\dfrac{d\delta_2}{dx} + \dfrac{1}{u_a}\dfrac{du_a}{dx}(2\delta_2 + \delta_1) + \dfrac{\tau(y=0)}{\rho u_a^2} = 0$
- Zu Teil d): Bringen Sie zunächst die von Kármánsche Integralbeziehung auf die Form

$$\frac{d\delta}{dx} + \Gamma\frac{\delta}{x} - \Omega\frac{1}{\delta\, x} = 0$$

  und lösen Sie diese dann. Die Konstanten Γ und Ω müssen im Endergebnis nicht wieder durch bekannte Größen ersetzt werden.
- $\displaystyle\int \sin^2(ax)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin(2ax)$
- $\displaystyle\int \frac{x}{a^2 - x^2}dx = -\frac{1}{2}\ln(a^2 - x^2)$

Quelle: Frühjahr 2010

3. Aufgabe



An einer längs angeströmten ebenen Platte (Breite B) bildet sich eine laminare, inkompressible Grenzschicht aus. Durch gleichmäßig in der Platte verteilte Bohrungen wird mit konstanter Geschwindigkeit über der Länge L der Volumenstrom $\dot{V}$ abgesaugt. Für das Geschwindigkeitsprofil in x-Richtung in der Grenzschicht gilt der Polynomansatz:

$$\frac{u(y)}{u_a} = a_0 + a_1\left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 .$$

1. Für die Berechnung der Koeffizienten nennen Sie die drei Randbedingungen, die das Problem eindeutig beschreiben.
2. Bestimmen Sie für diese Grenzschichtströmung die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 des Geschwindigkeitsprofils.
3. Die Platte wird nun als Bodenplatte in einem Windkanal mit divergentem Querschnitt verwendet und die Grenzschicht löst im Punkt x_{ab} ab. Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsprofil der Grenzschicht am Punkt der Ablösung als Funktion der gegebenen Größen.

Gegeben: $\dot{V}$, B, L, η, ρ, $u_a(x_{ab}), \delta(x_{ab})$

Hinweis:

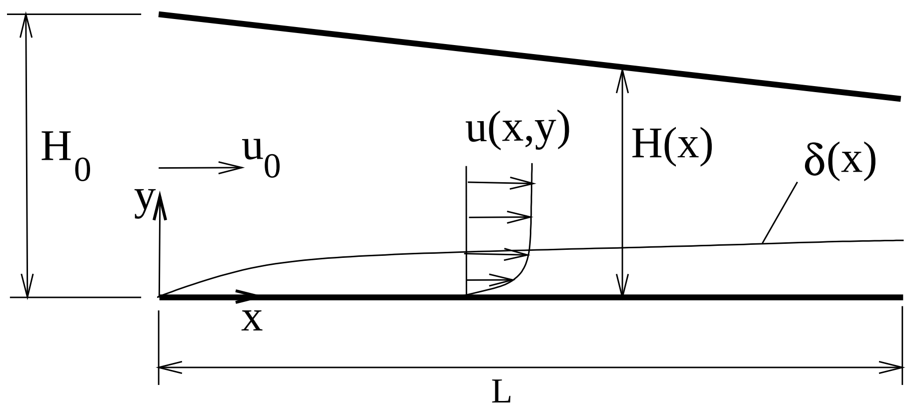
- x-Impulsgleichung der Grenzschichtgleichungen für zweidimensionale stationäre inkompressible Strömungen:
$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Quelle: Frühjahr 2012

4. Aufgabe

Durch einen konvergenten Kanal der Länge L strömt eine inkompressible Flüssigkeit der Dichte ρ und der Zähigkeit η. An der unteren Kanalwand bildet sich eine laminare Grenzschicht aus. Das Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht läßt sich durch einen Polynomansatz darstellen:

$$\frac{u(x,y)}{u_a(x)} = a_0(x) + a_1(x)\frac{y}{\delta} + a_2(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$



1. Bestimmen Sie den Verlauf der Außengeschwindigkeit $u_a(x)$ und des Druckgradienten dp/dx. Betrachten Sie dabei die Strömung als reibungsfrei und eindimensional.
2. Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_0(x), a_1(x)$ und $a_2(x)$.
3. Bestimmen Sie die Verdrängungsdicke $\delta_1(x)$ in Abhängigkeit von der Grenzschichtdicke $\delta(x)$.
4. Kann die Grenzschicht ablösen? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.
5. Durch Anbringung eines Stolperdrahtes an der unteren Wand wird der Umschlag laminar/turbulent frühzeitig erzwungen. Wird der Reibungswiderstand an dieser Wand damit verkleinert oder vergrößert? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

Gegeben: $u_0, \rho, \eta, L, H_0, H(x) = H_0 - C \cdot \frac{x}{L} \qquad C > 0$

Hinweis:

- Die Strömung ist als eben zu betrachten
- Die Grenzschicht an der oberen Kanalwand ist zu vernachlässigen
- $\delta \ll H(x)$

Quelle: Herbst 2008