Tutorenprogramm - Strömungsmechanik I

Impuls- und Impulsmomentensatz - Musterlösung

1. Aufgabe

1. Impulssatz in x-Richtung:
   $\frac{dI_x}{dt} = \varrho v^2 \cos\alpha B = F_x$
   Die gesuchte Kraft ist $F = -F_x$.

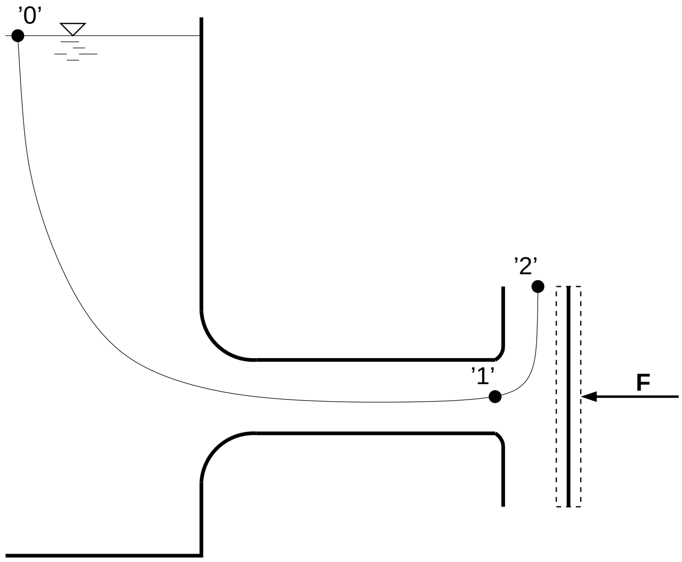
2. verlustfreie Umlenkung, Bernoulli von '0'-'1' und '0'-'2':
   $p_a + \frac{\varrho}{2} v^2 = p_a + \frac{\varrho}{2} v_1^2$
   $p_a + \frac{\varrho}{2} v^2 = p_a + \frac{\varrho}{2} v_2^2$
   $\rightarrow v_2 = v_1 = v$
   Konti:
   $\rightarrow vB = v_1 B_1 + v_2 B_2 \rightarrow B = B_1 + B_2$

   Impulssatz in y-Richtung KV 1:
   $\frac{dI_y}{dt} = \varrho v^2 \sin\alpha B + \varrho v_1^2 B_1 - \varrho v_2^2 B_2 = 0$
   $\rightarrow \quad v^2 \sin\alpha B + v^2 B_1 - v^2 (B - B_1) = 0$
   $\rightarrow \quad (\sin\alpha - 1) B + 2B_1 = 0$
   $\rightarrow \quad B_1 = \frac{B}{2}(1 - \sin\alpha)$
   $\rightarrow \quad B_2 = \frac{B}{2}(1 + \sin\alpha)$

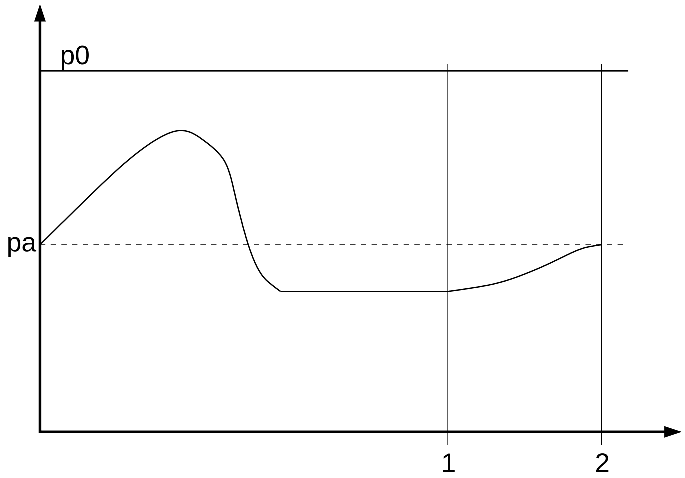
3. Impulssatz in x-Richtung für die bewegte Kontrollfläche:
   $\frac{dI_x}{dt} = \int \varrho v_a \, (\vec{v}_r \cdot \vec{n}) \, dA = F_x$
   $\varrho v_a v_r - \varrho v_F v_r \frac{B}{2} - \varrho v_F v_r \frac{B}{2} = F_x$
   $\rightarrow F_x = \varrho v (v - v_F) B - \varrho v_F (v - v_F) B$
   $= \varrho (v - v_F)^2 B.$
   Die gesuchte Kraft $F = -F_x$.
   $v_a =$ Absolutgeschw.
   $v_r =$ Relativgeschw.
   $v_r = v - v_F$

Quelle: Frühjahr 2007

2. Aufgabe



1. Druckverlauf (mehrere Möglichkeiten):



2. Bernoulli $0 \to 2$ $(D \ll H)$

$p_a + \rho g H = p_a + \frac{\rho}{2}{v_2}^2 \quad \to \quad v_2 = \sqrt{2gH}$

Konti: $\quad v(r) 2\pi r B = v_2 2\pi \frac{D}{2} B \quad \to \quad v(r) = \sqrt{2gH}\frac{D}{2r}$

Bernoulli 'r' $\to$ 2: $\left(r \geq \frac{d}{2}\right)$

$p(r) + \frac{\rho}{2} v^2(r) = p_a + \frac{\rho}{2}{v_2}^2 \quad \to \quad p\left(r\right) = p_a + \rho g H \left(1 - \frac{D^2}{4r^2}\right) \quad \frac{d}{2} \leq r \leq \frac{D}{2}$

aus der Aufgabenstellung und mit $v(r = d/2) = \sqrt{2gH} D/d$:

$p\left(r\right) = p_a + \rho g H \left(1 - \frac{2r}{d}\frac{D^2}{d^2}\right), \qquad 0 \leq r \leq \frac{d}{2}$

Impulssatz um die Platte (x-Richtung):

$$\int_0^{\frac{d}{2}} (p(r) - p_a)\, 2\pi r \; dr + \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} (p(r) - p_a)\, 2\pi r \; dr = -F$$

$$\rightarrow \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi\rho g H \left(1 - \frac{2rD^2}{d^3}\right) r\, dr + \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} 2\pi\rho g H \left(1 - \frac{D^2}{4r^2}\right) r \; dr = -F$$

$$\rightarrow -F = \frac{\pi}{2}\rho g H \left(\frac{d^2}{2} - \frac{D^2}{3}\right) + \frac{\pi}{2}\rho g H \left(\frac{D^2}{2} - \frac{d^2}{2} - D^2 \ln\frac{D}{d}\right) = \frac{\pi D^2}{2}\rho g H \left(\frac{1}{6} - \ln\frac{D}{d}\right)$$

$\rightarrow F = \frac{\pi D^2}{2}\rho g H \left(\ln\frac{D}{d} - \frac{1}{6}\right)$ d.h. für $\ln\frac{D}{d} > \frac{1}{6}$ wird die Platte angesaugt.

Quelle: Frühjahr 2009

3. Aufgabe

1. Kontinuitätsgleichung:

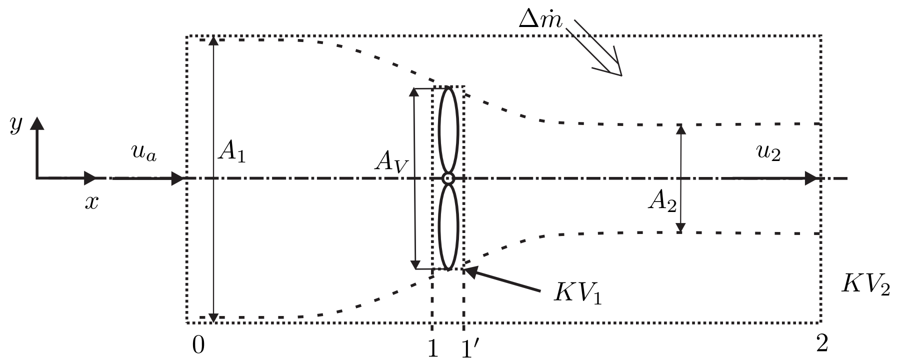
   $\rho u_1 A_1 = \rho u_2 A_2 = \rho u_p A_p$

   $\frac{A_p}{A_2} = \frac{u_2}{u_p}$

   Bedingung für Geschwindigkeit in Propellerebene:

   $v_p = \frac{u_1 + u_2}{2}$

   $A_2 = A_p \frac{u_1 + u_2}{2u_2} \qquad [m] \qquad (1)$



2. Impulserhaltungssatz in x-Richtung über Kotrollvolumen 1 (KV_1):

   $-\rho u_{1'}^2 A_p + \rho u_{1'}^2 A_p = (p_1 - p_1')A_P + F_L$

   $\Rightarrow (p_1' - p_1)A_P = F_L \qquad (2)$

   Bernoulli von 0 - 1:

   $p_a + \frac{\rho}{2}u_1^2 = p_1 + \frac{\rho}{2}u_1^2 \qquad (3)$

   Bernoulli von 1' - 2:

   $p_1' + \frac{\rho}{2}u_{1'}^2 = p_a + \frac{\rho}{2}u_2^2 \qquad (4)$

   Gleichung (3) und (4) gleich setzen:

   $p_1 - p_1' = \frac{\rho}{2}(u_1^2 - u_2^2) \qquad (5)$

   (5) einsetzen in (2):

   $F_L = \frac{\rho}{2}(u_2^2 - u_1^2)A_p \qquad \left[\frac{kg}{m^3}\left(\frac{m^2}{s^2}\right)m^2 = N\right]$

   Alternativer Lösungsweg:

   Impulserhaltungssatz in x-Richtung über Kontrollvolumen 2 (KV_2):

   $-\Delta\dot{m}u_1 - \rho u_1^2 A_1 + \rho u_2^2 A_2 + \rho u_1^2(A_1 - A_2) = F_L$

   $-\Delta\dot{m}u_1 + \rho A_2(u_2^2 - u_1^2) = F_L \qquad (7)$

   Kontinuitätsgleichung:

   $\Delta\dot{m} + \rho u_1 A_1 = \rho u_2 A_2 + \rho u_1(A_1 - A_2)$

   $\Delta\dot{m} = \rho u_2 A_2 - \rho u_1 A_2 = \rho A_2(u_2 - u_1) \qquad (8)$

Gleichung (8) in (7) einsetzen:

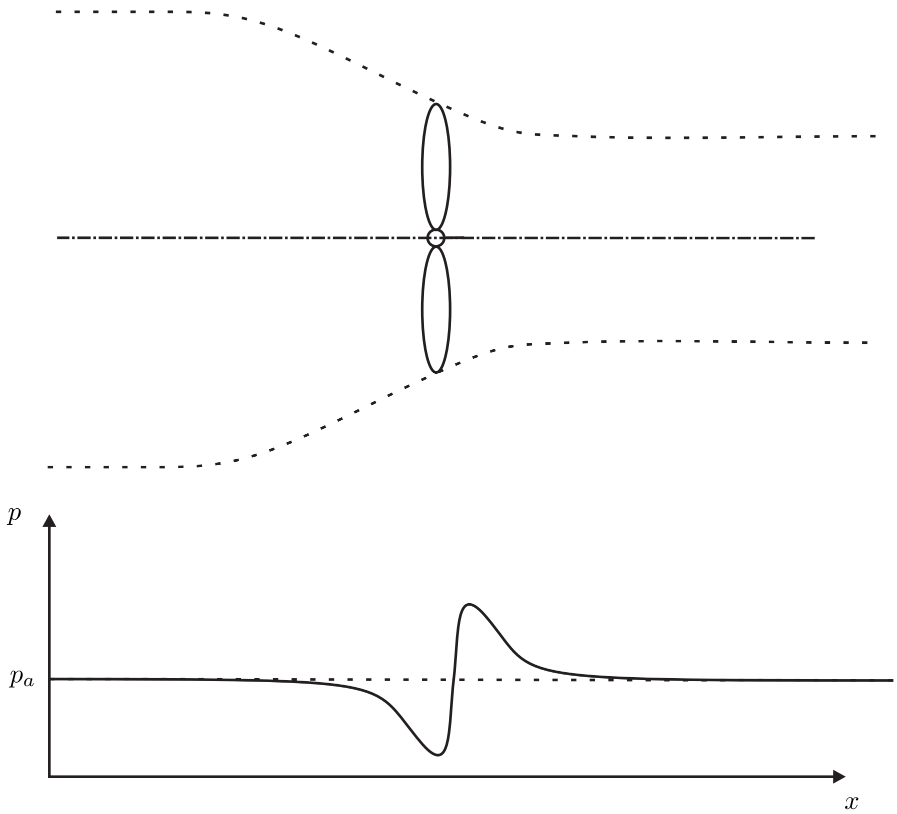
$-\rho A_2(u_2 u_1 - u_1^2) + \rho A - 2(u_2^2 - u_1^2) = F_L$

$$\Rightarrow F_L = \rho A_2(u_2^2 - u_2 u_1) \qquad (9)$$

Mit Gleichung (1): $F_L = \rho A_P \dfrac{u_1 + u_2}{2u_2}(u_2^2 - u_2 u_1)$

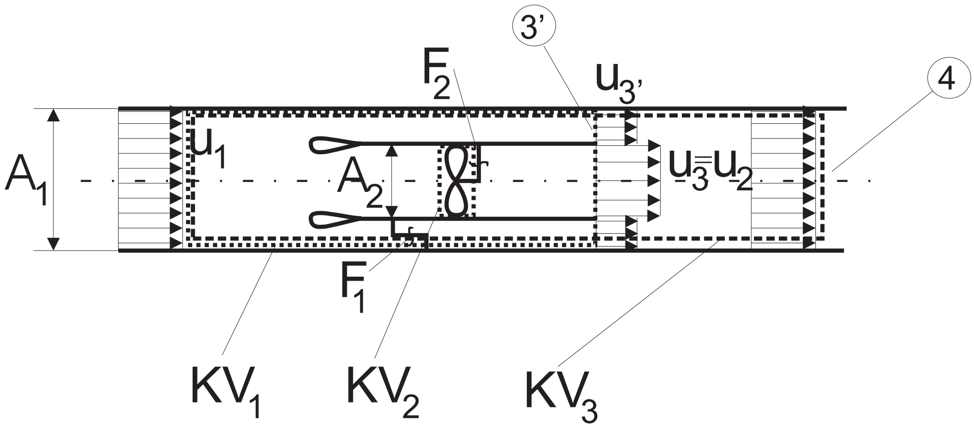
$\Rightarrow F_L = \dfrac{\rho}{2} A_p(u_2^2 - u_1^2) \qquad \left[\dfrac{kg}{m^3}\left(\dfrac{m^2}{s^2}\right) m^2 = N\right]$

3. Druckverlauf:



Quelle: Herbst 2013

4. Aufgabe



1. F_1:
   Impuls KV 1: $u_2 = u_3$
   $-\varrho u_1^2 A_1 + \varrho u_2^2 A_2 + \varrho u_{3'}^2 (A_1 - A_2) = (p_1 - p_3)A_1 + F_1$

   Konti:
   $-\varrho u_1 A_1 + \varrho u_2 A_2 + \varrho u_{3'} (A_1 - A_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{3'} = 10\frac{m}{s}$

   Bernoulli $1 - 3'$:
   $p_1 + \frac{\varrho}{2} u_1^2 = p_3 + \frac{\varrho}{2} u_{3'}^2$

   Einsetzen:
   $F_1 = \varrho \left[-u_1^2 \frac{A_1}{2} + u_2^2 A_2 + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 \right) u_{3'}^2 \right] = 312,5N$ (Zug)

   F_2:
   Impuls KV 2:
   $0 = (p_2 - p_3)A_2 + F_2$

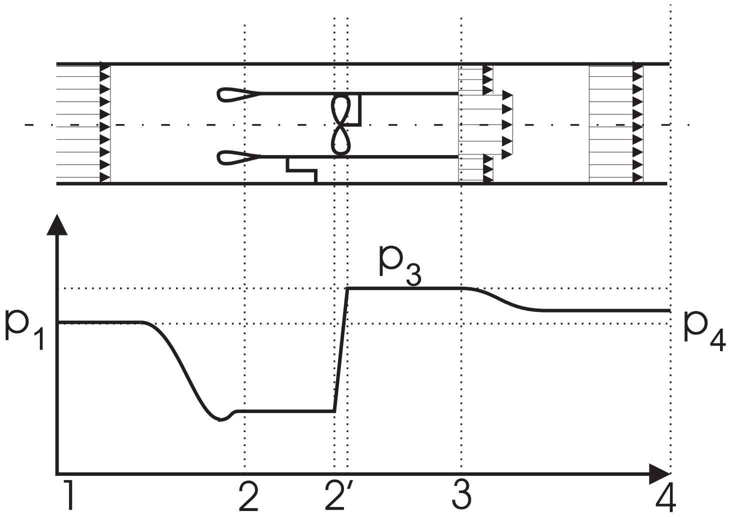
   Bernoulli $1 - 2$:
   $p_1 + \frac{\varrho}{2} u_1^2 = p_2 + \frac{\varrho}{2} u_2^2 = p_3 + \frac{\varrho}{2} u_{3'}^2$ mit $p_{3'} = p_3$

   Einsetzen:
   $F_2 = \frac{\varrho}{2}(u_2^2 - u_{3'}^2)A_2 = 250N$ (Zug)

2. $P = F_2 u_2 = 7500W$

3. Druck p_4 - Impuls KV 3:
   $0 = (p_1 - p_4)A_1 + F_1$
   $p_4 = p_1 + \frac{F_1}{A_1} = 100312,5N/m^2$

4. Skizze:



Quelle: Herbst 2006

3. Aufgabe